ボラティリティファクターを用いた資産評価モデルに関する検証 (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)

小林, 寛司; 宮崎, 浩一

数理解析研究所講究録
第1802巻2012年228-234

ボラティリティファクターを用いた資産評価モデルに関する検証[1]

電気通信大学　小林　寛司(Hiroshi Kobayashi)　宮崎　浩一(Koichi Miyazaki)
University of Electro-Communications

1. はじめに

Sharpe(1964),Lintner(1965)による資本資産評価モデル（以下CAPMと呼ぶ）は，様々なポートフォリオの超過リターンを市場ポートフォリオの超過リターンによって説明することを試みる回帰モデルである．CAPMは，その簡便さから金融実務において広く利用されており，非常に大きな影響力を持つモデルである．しかし，実際の市場には，CAPMでは説明できないアノマリーが存在するという実証結果が多く報告されている．この問題点の解決策として，CAPMを連続時間に拡張したMerton(1973)のIntertemporal CAPM(以下ICAPMと呼ぶ)やRoss(1976)のAPTといったマルチファクターモデル等がある．マルチファクターモデルは，複数のリスクファクターで株価リターンを説明するモデルであり，実証ファイナンスの分野では，どのようなリスクファクターを用いれば，株価リターンを説明できるのかについての検証が非常に重要視されている．

資産評価モデルにおけるリスクファクターの1つとしてリターンの変動性を表すボラティリティが考えられる．市場全体のボラティリティを資産評価モデルのリスクファクターとして着目した研究にAdrian and Rosenberg(2008)がある．Adrian and Rosenberg(2008)では，市場全体のボラティリティを短期ボラティリティと長期ボラティリティに分解し，推定された短期・長期ボラティリティをCAPMに加えたモデルを提案した．検証結果として，米国株式市場において短期・長期ボラティリティが株価リターンに与える影響を検証し，各ボラティリティファクターが株価リターンに有意に影響を与えるものであることを示した．

本研究ではAdrian and Rosenberg(2008)のアイデアをもとに市場全体のボラティリティを短期・長期ボラティリティに分解し，各ボラティリティが株価リターンに与える影響を詳細に検証する．しかし，先行研究のモデルでは推定された短期・長期ボラティリティが具体的に指し示すファイナンス的意味合いが不明確である．そこで本研究のモデルでは，長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動を捉えるものであり，短期ボラティリティは，日次リターンの変動のうち長期的な平均リターンの変動以外の部分にあたると仮定し，短期・長期ボラティリティを推定する．本研究では推定された短期・長期ボラティリティが株価リターンに与える影響と長期ボラティリティを推定する際に平均リターンをとる期間としてどの程度の期間を想定すれば，ファイナンス的に整合的な結果が得られるのかについて簡単に報告する．さらに，昨今問題となっている金融危機が発生する以前と以後において，短期・長期ボラティリティが株価リターンに与える影響に違いが生じるかについて詳細に検証を行う．

本論文の構成は次のとおりである．次章では先行研究のボラティリティ変動モデルについて紹介したうえで，本研究で用いるボラティリティ変動モデルを提案する．3章では，本研究で用いるリスク

1 本研究は科研費（22510143）の助成を受けたものである．

ファクターについて詳細に説明を与えた後，本研究で用いる資産評価モデルを導入する．4 章では，実証分析を行う．最終章では，まとめと結語付す．

2. ボラティリティ変動モデル

2.1 先行研究で用いられている GARCH モデル(Adrian and Rosenberg(2008))

マーケット超過リターン R_{t+1}^{M} を t 日において予測可能な部分 μ_t^M と予測不可能な変動 $\sqrt{v_t}\varepsilon_{t+1}$ の和として以下のように表す．

$$R_{t+1}^{M} = \mu_t^M + \sqrt{v_t}\varepsilon_{t+1} \qquad \varepsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1) \tag{1a}$$

ここで，予測不可能な変動は，常に非負の値を取るマーケットボラティリティ $\sqrt{v_t}$ と標準正規分布に従う ε_{t+1} との積で表せるものと仮定し，EGARCH モデルを基に(1b)〜(1d)のようにモデル化する．

$$\ln\sqrt{v_t} = s_t + l_t \tag{1b}$$

$$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5\varepsilon_{t+1} + \theta_6(|\varepsilon_{t+1}| - \sqrt{2/\pi}) \tag{1c}$$

$$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9\varepsilon_{t+1} + \theta_{10}(|\varepsilon_{t+1}| - \sqrt{2/\pi}) \tag{1d}$$

ここで，　s_{t+1} は短期ボラティリティ，l_{t+1} は長期ボラティリティを表す．

Adrian and Rosenberg(2008)で提案されている GARCH モデルでは，実際の市場で観測されるボラティリティショックの持続性とボラティリティ変動の負の非対称性を表現できるモデルとなっている．ボラティリティショックの持続性とは，ボラティリティが上昇（低下）した後にはボラティリティが高い（低い）期間がしばらく続くことであり，先行研究のモデルでは(1c)式，(1d)式から $t+1$ 日のボラティリティは，t 日のボラティリティを説明変数として加えており，過去のボラティリティの変動の影響を次期のボラティリティに伝播することが可能になることから，ボラティリティショックの持続性を表現することができる．また，ボラティリティ変動の負の非対称性とは，株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方がボラティリティの上昇が大きいという性質である．上記のモデルにおいて $\theta_5 < 0, \theta_9 < 0$ であれば，予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することからボラティリティ変動の負の非対称性を表現することが可能となる．

期待超過リターン μ_t^M は，以下のように平均 θ_1 のまわりに短期ボラティリティと長期ボラティリティのリスクプレミアムを付加した形で表現される．

$$\mu_t^M = \theta_1 + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t \tag{2}$$

上記のボラティリティ変動モデルのパラメータは最尤法で推定する．

2.2 先行研究に対する問題意識と改善法

先行研究では，推定に際して，短期・長期ボラティリティを分離するため，短期・長期ボラティリ

ティの自己回帰係数（$\theta_4 < \theta_8$）を制約条件として推定を行っている．しかし，自己回帰係数の制約のみで短期・長期ボラティリティを推定した場合，推定された短期・長期ボラティリティが具体的に指し示すファイナンス的意味合いが不明確である．そこで，本研究では長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動を捉えるものであり，短期ボラティリティは日次リターンの変動のうち長期的な平均リターンの変動以外の部分あたると仮定し，各ボラティリティを推定する．

また，先行研究では，資産評価モデルのリスクファクターとして短期・長期ボラティリティのイノベーションを用いている．短期・長期ボラティリティは(1c)，(1d)式のようなプロセスに従っており，ボラティリティのイノベーションを求める際に，(1c)，(1d)式に準じた形で算出する必要がある．しかし先行研究では，日次で推定されたボラティリティのイノベーションを月中で足し合わせたものをリスクファクターとして用いており，本来のボラティリティプロセスから生じたイノベーションとは異なるもので検証を行っている．本研究では，日次で推定されたボラティリティのイノベーションをそのまま用いて検証を行う．

2.3 本研究で提案する GARCH モデル

本研究のモデルでは，長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動を捉えるものであり，短期ボラティリティは，日次リターンの変動のうち長期的な平均リターンの変動では捉えられない部分であると考える．まず，長期的な平均リターンと長期ボラティリティの過程を以下のように仮定する．

$$R_{i,t+1}^{lM} = \mu_t^{lM} + \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l \qquad \varepsilon_t^l \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1) \tag{3a}$$

$$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1}^l + \theta_{10}\left(\left|\varepsilon_{t+1}^l\right| - \sqrt{2/\pi}\right) \tag{3b}$$

$$\mu_t^{lM} = \theta_1 + \theta_3 l_t \tag{3c}$$

ここで，$R_{i,t+1}^{lM}$ は t+1 日から i 日遡った i 個の日次マーケット超過リターンの平均値，μ_t^{lM} は t 日における長期の期待超過リターン，ε_t^l は誤差項を表す．また期待リターンは，平均まわりに長期ボラティリティのリスクプレミアムを付加した形で表す．上記のボラティリティ変動モデルのパラメータは最尤法で推定する．

次に短期ボラティリティを推定する．短期ボラティリティの過程を以下のように仮定する．

$$R_{t+1}^{M} = \mu_t^{M} + \exp(s_t)\varepsilon_{t+1}^s + \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l \quad \varepsilon_t^s \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1) \tag{4a}$$

$$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5 \varepsilon_{t+1}^s + \theta_6\left(\left|\varepsilon_{t+1}^s\right| - \sqrt{2/\pi}\right) \tag{4b}$$

$$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1}^l + \theta_{10}\left(\left|\varepsilon_{t+1}^l\right| - \sqrt{2/\pi}\right) \tag{4c}$$

$$\mu_t^{M} = \theta_1 + \theta_1' + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t \tag{4d}$$

ここで，R_{t+1}^{M} は t 日から t+1 日における日次のマーケット超過リターン，μ_t^{M} は t 日における期待超過

リターン，ε_t^sは誤差項を表す．また，期待リターンは平均まわりに短期ボラティリティと長期ボラティリティのリスクプレミアムを付加した形で表す．上記のボラティリティ変動モデルのパラメータは最尤法で推定する．

上記のように，長期ボラティリティを推定する際，平均リターンを用いているため，本研究のモデルを用いれば，日次リターンの平均を取る期間としてどの程度の期間を用いて長期ボラティリティを推定すればファイナンス的に整合的な結果が得られるかどうかについて検証することが可能になる．

3. 資産評価モデル

本研究では，Merton(1973)の ICAPM をもとに資産評価モデルを構築する．ICAPM では，市場ポートフォリオは 1 つのファクターとなり，将来の投資機会の変化（状態変数の変化）に伴う不確実性をヘッジするための需要によって他のリスクファクターが追加されることを考えている．本研究では，短期ボラティリティと長期ボラティリティの 2 つを状態変数とする以下のような ICAPM を考える．

$$E_t\left[R_{t+1}^i\right]=\gamma_t Cov_t\left[R_{t+1}^i,R_{t+1}^M\right]+F_s Cov_t\left[R_{t+1}^i,s_{t+1}\right]+F_l Cov_t\left[R_{t+1}^i,l_{t+1}\right] \qquad (5)$$

ここで，R_{t+1}^iは銘柄 i の t 日から t+1 日までの超過リターン，γ_tは相対的リスク回避係数，F_s,F_lは状態変数 s,l に依存する投資家の選好を表すパラメータを示している．

(5)式を見ると，右辺第一項は近視眼的な部分であり，将来の投資機会の変化を考えていない．また，右辺第二項と第三項は，将来の投資機会の変化に対するヘッジを表した部分になっている．

ここで，(5)式から個別株式のリターンが，マーケットリターンと個別株式のリターンの共分散，個別株式のリターンと短期・長期ボラティリティのイノベーションの共分散の 3 つのリスクプレミアムで構成されていることに着目し，資産評価モデルを構築すると以下のように表せる．

$$R_{t+1}^i=\beta_M^i R_{t+1}^M+\beta_{sres}^i sres_{t+1}+\beta_{lres}^i lres_{t+1}+\varepsilon_{t+1}^i \qquad (6)$$

ここで，$sres_{t+1}$は短期ボラティリティのイノベーション，$lres_{t+1}$は長期ボラティリティのイノベーション，ε_{t+1}^iは誤差項，$\beta_M^i,\beta_{sres}^i,\beta_{lres}^i$は各ファクターに関する感応度を表す．本研究では，短期・長期ボラティリティを AR(1)モデルに当てはめ，そのイノベーションを$sres_{t+1}$，$lres_{t+1}$とする．

4. 実証分析

4.1 データと分析設定

本研究では，2001 年 6 月から 2010 年 8 月までの東証株価指数（TOPIX），無担保オーバーナイトコールレートの日次データと 2010 年 8 月末までに東証一部に上場していた個別銘柄の株価データ及び売買代金のデータを用いた．尚，市場ポートフォリオとして，TOPIX，無リスク金利には無担保オーバーナイトコールレートを用いた．また市場環境の違いによる短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響の差異について検証するため，2001 年 9 月から 2007 年 7 月までを安定期，2007 年 8 月から 2009 年 3 月までを混乱期として検証を行う．本研究では，短期・長期ボラティリティが株式特性の異なるポートフォリオに対してどのような影響を与えるのかについて検証するため，(6)式の左辺のリターンとして株式時価総額と簿価時価比率でソートした 25 個のポートフォリオリターンを用いる．

4.2 分析結果とその考察

4.2.1 全期間における分析結果のサマリー

本稿では紙面の都合上，長期ボラティリティを推定する際に平均リターンをとる期間として，どの程度の期間を想定すればファイナンス的に整合的な結果が得られるかについての検証に関して簡単に報告する．実証結果より，平均リターンをとる期間として60日程度の期間を想定し，長期ボラティリティを推定した場合に，短期ボラティリティは，小型株リターンに負の影響を与え，長期ボラティリティは，割安株リターンに正の影響を与えることがわかった．短期ボラティリティが小型株リターンに負の影響を与える原因として，短期的なショックが起きた場合に，少数の投資家が小型株から安全資産等に資金移動を行うため，短期ボラティリティの係数が有意に負の値となったことが考えられる．また，長期ボラティリティが割安株リターンに正の影響を与える原因として，割安株が適正価格から乖離し割安な水準にあり，長期ボラティリティの上昇（長期的に株価の変動が大きくなる）により，株価の割安さが再評価される影響が強く働くため，長期ボラティリティの係数が正の値となったことが考えられる．このことから，平均リターンをとる期間として60日程度を想定してボラティリティを推定した場合にファイナンス的に整合的な結果が得られることがわかる．詳しい実証結果については小林・宮崎(2012)を参照されたい．

4.2.2 安定期，混乱期における分析結果

ここでは，安定期と混乱期において推定されたGARCHモデルのパラメータとファクター感応度について詳細に検証する．まず，安定期と混乱期におけるGARCHモデルのパラメータの違いについて検証する．表1と表2はそれぞれ安定期と混乱期におけるGARCHモデルのパラメータ推定結果を表す．ここでは，前項の結果を受けてファイナンス的に整合的な結果が得られた日次リターンの平均を取る期間として60日間を用いて長期ボラティリティを推定した場合の結果を示した．まず表1，表2を押し並べて見ると，ボラティリティショックの持続性を表現する自己回帰係数が$\theta_4 > \theta_8$となっていることがわかる．本研究では，長期ボラティリティを推定する際，平均リターンを用いている．平均リターンの変動は，日次リターンの変動に比べて小さいと考えられるため，長期ボラティリティのショックの持続性は小さくなり，長期ボラティリティの平均回帰スピードを表すθ_8が小さくなっていると考えられる．また混乱期に関しては，θ_8の値が安定期に比べて大きくなっている．混乱期においては，平均リターンを用いて長期ボラティリティを推定したとしてもリーマンショックが起きた期間を含んでいるため，短期的なショックの影響が強く出ると考えられる．そのため，長期ボラティリティのショックの持続性は大きくなり，θ_8の値は，安定期に比べて混乱期の方が大きくなると考えられる．

次に，ボラティリティ変動の非対称性について検証する．表1と表2のθ_5とθ_9に関して見ると，ともに負の値をとっていることがわかる．このことから，安定期，混乱期において，短期・長期ボラティリティが負の非対称性をもっていることがわかる．また係数の大小に関して見ると，安定期に比べて混乱期の方が，θ_5とθ_9の絶対値が大きくなっている．混乱期では，リーマンショックのように株価が大きく下落した期間が含まれているため，急激な株価の下落に伴いボラティリティの変動も大きくなり，安定期に比べてボラティリティ変動の負の非対称性が大きくなったと考えられる．

表 1.安定期における GARCH モデルのパラメータ推定結果

Market Excess Returns				
$R_{t+1}^M = \mu_t^M + \exp(s_t)\varepsilon_{t+1}^s + \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l$		$\mu_t^M = \theta_1 + \theta_1' + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t$		
	θ1	θ1'	θ2	θ3
Coefficient	-0.038***	-0.007***	-0.001***	-0.006***
Short-Run Volatility				
$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5 \varepsilon_{t+1}^s + \theta_6 (\lvert\varepsilon_{t+1}^s\rvert - \sqrt{2/\pi})$				
	θ4	θ5	θ6	
Coefficient	0.995 ***	-0.044***	0.078 ***	
Long-Run Volatility				
$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1}^l + \theta_{10} (\lvert\varepsilon_{t+1}^l\rvert - \sqrt{2/\pi})$				
	θ7	θ8	θ9	θ10
Coefficient	-0.241 ***	0.957***	-0.017***	0.211***

*** ; 1%有意水準

表 2. 混乱期における GARCH モデルのパラメータ推定結果

Market Excess Returns				
$R_{t+1}^M = \mu_t^M + \exp(s_t)\varepsilon_{t+1}^s + \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l$		$\mu_t^M = \theta_1 + \theta_1' + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t$		
	θ1	θ1'	θ2	θ3
Coefficient	-0.028 ***	-0.007 ***	-0.002***	-0.005 ***
Short-Run Volatility				
$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5 \varepsilon_{t+1}^s + \theta_6 (\lvert\varepsilon_{t+1}^s\rvert - \sqrt{2/\pi})$				
	θ4	θ5	θ6	
Coefficient	0.999***	-0.058***	0.084***	
Long-Run Volatility				
$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1}^l + \theta_{10} (\lvert\varepsilon_{t+1}^l\rvert - \sqrt{2/\pi})$				
	θ7	θ8	θ9	θ10
Coefficient	-0.199***	0.998***	-0.223***	0.510***

*** ; 1%有意水準

次に，表 3 から表 6 には安定期，混乱期における短期・長期ボラティリティファクターの感応度を表したものを示した. 各表の上段が 25 ポートフォリオの内, 大型株, 小型株に関して抜き出したもの, 下段が割安株，成長株に関して抜き出したものを示した.

まず，表 3，表 4 を見ると安定期における検証結果では，短期・長期ボラティリティはともにリターンに与える影響が大きいことがわかる．次に，表 5，表 6 を見ると，安定期に比べると短期，長期ボラティリティが株価リターンに与える影響が小さくなっていることがわかる．これは，混乱期において，短期・長期ボラティリティの株価リターンに対する説明力自体が下落していることや割安度の指標であるBPRが株価の割安度を測る指標としてうまく機能せず割安株と成長株の選別ができていないためではないかと考えられる．また混乱期に着目すると，短期ボラティリティはリターンに与える影響はほとんど見られないが，長期ボラティリティは安定期ほどではないがリターンに与える影響が残ることがわかる．先の結果も踏まえると長期ボラティリティはボラティリティ変動の非対称性が短期ボラティリティよりも大きく，リターンを説明する際に短期ボラティリティよりも重要なリスクファクターとなることがわかる.

表 3.安定期における sres の感応度

Loadings on the Short-run Volatility Factor	B/M2	B/M3	B/M4
Small	-0.88***	-1.00***	-0.93***
Large	-0.53	-0.25	-0.11
	Size2	**Size3**	**Size4**
Growth	-1.01***	-0.67**	-0.67**
Value	-1.28***	-1.03***	-0.36

表 4.安定期における lres の感応度

Loadings on the Long-run Volatility Factor	B/M2	B/M3	B/M4
Small	0.81**	1.57***	1.59***
Large	0.57	0.71**	0.52
	Size2	**Size3**	**Size4**
Growth	1.00**	1.12***	1.21***
Value	1.30***	0.92**	-0.22

表 5.混乱期における sres の感応度

Loadings on the Short-run Volatility Factor	B/M2	B/M3	B/M4
Small	-0.23	-0.52	0.22
Large	0.52	1.41**	-0.66
	Size2	**Size3**	**Size4**
Growth	-0.79	0.09	-0.90
Value	0.20	0.12	0.83

表 6.混乱期における lres の感応度

Loadings on the Long-run Volatility Factor	B/M2	B/M3	B/M4
Small	0.26**	0.17	0.30***
Large	0.12**	0.06	-0.02
	Size2	**Size3**	**Size4**
Growth	0.19	0.35***	0.15
Value	0.33**	0.29**	0.19

*** ; 1%有意水準　** ; 5%有意水準

5. まとめと結語

本研究では，長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動を捉えるものであると考え，短期ボラティリティは日次リターンの変動のうち長期的な平均リターンの変動以外の部分にあたると仮定し，短期・長期ボラティリティを推定した．また，短期・長期ボラティリティが株価リターンに与える影響を検証した．また短期・長期ボラティリティにファイナンス的意味合いを与えるとともに，市場環境の違いにおける短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響の差異についても検証した．

本研究のモデルを用いて推定した短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響に関しては，短期ボラティリティが，小型株のリターンに対して負の影響を与える一方で，長期ボラティリティは，割安株のリターンに対して正の影響を与えており，各ボラティリティが株価リターンに与える影響が異なることがわかった．さらに，市場環境の違いによる短期，長期ボラティリティがリターンに与える影響に関して検証したところ，混乱期において短期，長期ボラティリティの説明力は安定期に比べて小さくなるが長期ボラティリティはある程度説明力を持つことがわかった．

参考文献

【1】 Adrian, T. and Rosenberg, J.: Stock Returns and Volatility: Pricing the Short-Run and Long-Run Components of Market Risk , *Journal of Finance*, **6**, pp.2997-3027 (2008)

【2】 Lintner, J. : The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, *Review of Economics and Statistics*, **47**, pp.13-37 (1965)

【3】 Merton, R. C.: An intertemporal asset pricing model, *Econometrica*, **41**, pp.867-887 (1973)

【4】 Ross, S.: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory*, **13**, pp.341-60 (1976)

【5】 Sharpe, W. F. : Capital Asset Pricing: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk, *Journal of Finance*, **19**, pp.425-442 (1964)

【6】 小林寛司，宮崎浩一：資産評価モデルにおける短期・長期ボラティリティの影響，情報処理学会論文誌　数理モデル化と応用，(2012) 掲載予定